★★★

ROYAUME DU MAROC

8

2^ième BAC - SM

2018 N

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES SESSION ORDINAIRE : JUIN 2018

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE

Le Premier Exercice

La Question : 1)

Il est clair que E est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ explicitée dans l'énoncé. E est non vide parce qu'on peut exhiber au moins un élément de cet ensemble et c'est $\theta = M(0,0)$. Soient $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux matrices de E.

$$M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-x' & -2(y-y') \\ y-y' & (x-x')+2(y-y') \end{pmatrix}$$

$$= M(x-x'; y-y') \in E$$

Car $(x-x')$ et $(y-y')$ sont deux nombres réels.

conclusion, $(E,+)$ est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2) a)

Il est clair que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'après le cours. Étant donnés α un réel et $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux matrices de E.

$$\alpha \cdot M(x,y) + M(x',y') = \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2(\alpha y + y') \\ \alpha y + y' & (\alpha x + x') + 2(\alpha y + y') \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha x + x';\ \alpha y + y') \in E$$

Parce que $(\alpha x + x')$ et $(\alpha y + y')$ sont trivialement deux nombres réels. Alors d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriel on conclut que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

La Question : 2) b)

Soit $M(x,y)$ un élément de E.

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= x.M(1,0) + y.M(0,1)$$

$$= x.I + y.J$$

Autrement dit, la famille (I,J) engendre l'espace $(E,+,\cdot)$. Si de plus elle est libre, ce serait une base à cet espace. Pour que la famille (I,J) soit libre il suffirait de montrer que la seule combinaison linéaire de ces deux matrices qui soit égale à la matrice nulle est celle (combinaison) dont tous les coefficients sont nuls.

$$\alpha.I + \beta.J = \theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} et\ \alpha = 0 \\ et\ \beta = 0 \end{cases}$$

Conclusion : (I,J) est libre Donc c'est une base de E.

Pause Méditation :

« The strong man is not the good wrestler. The strongest among you is the one who controls his anger »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : 3) a)

Il suffit de montrer que : $\forall M,N \in E$; $M \times N \in E$

$$M \times N = M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' - 2yy' & -2(x'y + y'x + 2yy') \\ x'y + y'x + 2yy' & xx' - 2yy' + 2(x'y + y'x + 2yy') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - 2yy' \ ; \ x'y + y'x + 2yy') \in E$$

Car $(xx' - 2yy') \in \mathbb{R}$ et $(xy' + yx' + 2yy') \in \mathbb{R}$.

Finalement : E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

La Question : 3) b)

Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $\times$ est associative dans E.
- $\times$ est distributive par rapport à + dans E.
- $\times$ est commutative dans E.

La première assertion est déjà vérifiée d'après la question 1.

Pour la deuxième assertion, on se donne trois matrices dans E. On utilisera éventuellement le résultat déjà prouvé suivant :
$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - 2yy' \ ; \ x'y + y'x + 2yy')$

D'une part On a :

$$M(x,y) \times \big(M(x',y') \times M(x'',y'')\big)$$
$$= M(x,y) \times M(x'x\text{-}2y'y; xy'+yx' + 2y'y'')$$
$$= M(xx'x\text{-}2xy'y - 2y(xy'+yx' + 2y'y'') \ ; \ x(xy'+yx' + 2y'y'') + y(x'x'' - 2y'y'') + 2y(xy'+yx' + 2y'y''))$$

D'autre part On retrouve le même résultat en calculant $(M(x,y) \times M(x',y')) \times M(x'',y'')$.

On peut même déduire l'associativité de $\times$ du fait que E est une partie stable de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$

Pour la troisième assertion, On se donne trois matrices de E et on utilisera éventuellement les formules déjà prouvées suivantes :

$$\begin{cases} M(x,y) + M(x',y') = M(x+x' \ ; \ y+y') \\ M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - 2yy' \ ; x'y + y'x + 2yy') \end{cases}$$

D'une part :

$$M(x,y) \times \big(M(x',y') + M(x'',y'')\big)$$
$$= M(x,y) \times M(x' + x'' \ ; y' + y'')$$
$$= M\big(x(x' + x'') - 2y(y' + y'') \ ; \ x(y' + y'') + y(x' + x'') + 2y(y' + y'')\big)$$
$$= M(xx' + xx''\text{-}2yy'\text{-}2yy'' \ ; \ xy' + xy''+yx'+yx'' + 2yy' + 2yy'')$$

D'autre part :

$$M(x,y) \times M(x',y') + M(x,y) \times M(x'',y'')$$
$$= M(xx' - 2yy' \ ; \ xy' + yx' + 2yy') + M\big(xx'' - 2yy'' \ ; \ xy'' + yx'' + 2yy''\big)$$
$$= M(xx' + xx''\text{-}2yy'\text{-}2yy'' \ ; \ xy' + xy''+yx'+yx'' + 2yy' + 2yy'')$$

D'où :

$$M(x,y) \times \big(M(x',y') + M(x'',y'')\big) = M(x,y) \times M(x',y') + M(x,y) \times M(x'',y'')$$

c-à-d que la loi $\times$ est distributive à gauche par rapport à la loi +. De la même façon on montre la distributivité à droite.

Pour la 4ième assertion on se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E ;

$$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - 2yy' \ ; \ xy' + x'y + 2yy')$$
$$= M(x'x - 2y'y \ ; \ y'x + yx' + 2y'y)$$
$$= M(x',y') \times M(x,y)$$

D'où $\times$ est commutative dans E.

Finalement : $(E,+,\cdot)$ est un anneau commutatif.

La Question : 4) a)

Soit l'application φ définie par :

$$\varphi \ : \ (\mathbb{C}^*,\times) \longmapsto (E,\times)$$
$$(x+iy) \longmapsto \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} = M(x+y \ ; \ -y)$$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nuls :

$$\varphi(z \times z') = \varphi\big((x+iy)(x'+iy')\big) = \varphi\big((xx' - yy') + i(xy' + x'y)\big)$$

$$= \begin{pmatrix} xx' - yy' + xy' + x'y & 2(xy' + x'y) \\ -xy' - x'y & xx' - yy' - xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Or , $\varphi(z) \times \varphi(z')$

$$= \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 2y' \\ -y' & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' - yy' + xy' + x'y & 2xy' + 2x'y \\ -xy' - x'y & xx' - yy' - xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^{2*}$; $\varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

c-à-d que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

La Question : 4) b)

Étant donnée $M(a,b)$ une matrice de E*. Résolvons dans C* l'équation $\varphi(z) = M(a,b)$.

$$\begin{aligned}\varphi(z) = M(a,b) &\Leftrightarrow \varphi(x+iy) = M(a,b)\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ -y=b \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a+b \;;\; qui\;\; est\;\; unique\;\; dans\; \mathbb{R} \\ y=-b \;\;;\; qui\;\; est\;\; unique\;\; dans\; \mathbb{R} \end{cases}\\ &\Leftrightarrow z = (a+b) - ib \;;\; qui\;\; est\;\; unique\;\; dans\; \mathbb{C}^*\end{aligned}$$

D'où l'on conclut la chose suivante :
$\forall\, M(a,b) \in E^*$; $\exists!\, z = (a+b) - ib \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = M(a,b)$
D'où φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.
L'élément $M(0,0)$ est exclu parce qu'il n'est pas inversible par × dans E. On a pu montrer que φ est un homomorphisme bijectif (isomorphisme)
Alors : $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (\varphi(\mathbb{C}^*),\times) = (E^*,\times)$

La Question : 4) c)

D'après les questions 4)a) et 4)b) on peut ainsi réclamer que les propriétés du groupe $(E^*,\times)$ seront déduites à partir de celles du groupe déjà connu $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme φ.

Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre le nombre complexe $(1+i0)$ et tout élément $(x+iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ admet un symétrique (inverse) $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Alors $(E^*,\times)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre la matrice $\varphi(1+0i) = M(1,0) = I$ et tout élément $M(x,y) = \varphi(x+y-iy)$ de E* admet un symétrique $Sym(M(x,y))$ dans $(E^*,\times)$ avec :

$$\begin{aligned}Sym\big(M(x,y)\big) &= Sym\big(\varphi(x+y-iy)\big)\\ &= \varphi\big(Sym(x+y-iy)\big)\\ &= \varphi\left(\frac{x+y}{(x+y)^2+y^2} + i\left(\frac{y}{(x+y)^2+y^2}\right)\right)\\ &= M\left(\frac{x+2y}{(x+y)^2+y^2} \;;\; \frac{-y}{(x+y)^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

La Question : 5)

Dans cette question on va utiliser la propriété caractéristique des corps, à savoir, il faut vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $(E^*,\times)$ est un groupe.
- × est distributive par rapport à +.

Pour la première assertion, c'est déjà fait exactement dans la question 1. La commutativité de + dans E résulte de celle de + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la deuxième assertion, c'est déjà fait aussi dans la question 4)c).

Pour la distributivité de × par rapport à + résulte de la distributivité de × par rapport à + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est une partie stable de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$

En conclusion : $(E,+,\times)$ est un corps. et comme × est commutatif dans E. Alors finalement $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

$$\begin{aligned}x^2 \equiv 1[p] &\Rightarrow (x^2)^{2k-1} \equiv 1^{2k-1}[p] \;;\; car\;\; (2k-1) \in \mathbb{N}^*\\ &\Rightarrow x^{4k-2} \equiv 1[p]\\ &\Rightarrow x^{(4k+3)-5} \equiv 1[p]\\ &\Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}x^{p-5} \equiv 1[p] &\Rightarrow p/(x^{p-5}-1)\\ &\Rightarrow (x^{p-5}-1) = kp \;;\; avec\;\; k \in \mathbb{N}^*\\ &\Rightarrow x^{p-5} - kp = 1\\ &\Rightarrow x\cdot(x^{p-6}) + p\cdot(-k) = 1\\ &\Rightarrow \exists\,(u,v) \in \mathbb{Z} \;;\; ux + vp = 1 \;;\; avec \left|\begin{array}{l} u = x^{p-6} \in \mathbb{Z} \\ v = -k \in \mathbb{Z} \\ p \geq 7 \end{array}\right.\\ &\Rightarrow x \wedge p = 1 \;;\; D'après\;\; Bezout\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned}x^{p-5} \equiv 1\,[p] &\Rightarrow x \wedge p = 1 \;;\; \text{d'après 2)a)}\\ &\Rightarrow x^{p-1} \equiv 1\,[p] \;;\; d'après\; Fermat\end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Trop facile, il suffirait de remplacer $p = 4k+3$ puis conclure.

La Question : 2) d)

$$x^{p-5} \equiv 1[p] \implies (x^{p-5})^k \equiv 1^k[p] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}^*$$
$$\implies x^{k(p-5)} \equiv 1[p] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}^*$$
$$\implies x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}^*$$
$$\implies \boxed{x^2 \cdot x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]} \quad : \quad (1)$$

$$x^{p-5} \equiv 1[p] \implies x^{p-1} \equiv 1\,[p] \quad ; \quad selon\ 2)b)$$
$$\implies (x^{p-1})^{k-1} \equiv 1^{k-1}\,[p] \quad ; \quad avec\ k-1 \geq 0$$
$$\implies x^{(p-1)(k-1)} \equiv 1\,[p] \quad ; \quad avec\ k-1 \geq 0$$
$$\implies \boxed{x^2 \cdot x^{(p-1)(k-1)} \equiv x^2\,[p]} \quad : \quad (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \implies x^2 \equiv 1\,[p]$$

Finalement : $\boxed{\left.\begin{array}{l} x^{p-5} \equiv 1\,[p] \\ p = 4k+3 \\ k \in \mathbb{N}^* \end{array}\right| \iff x^2 \equiv 1\,[p]}$

La Question : 3)

Pour résoudre l'équation $x^{62} \equiv 1\,[67]$
on utilise l'équivalence ainsi trouvée :
$x^{p-5} \equiv 1\,[p] \iff x^2 \equiv 1\,[p]$

$$x^{62} \equiv 1\,[67] \iff x^{67-5} \equiv 1\,[67]$$
$$\iff x^2 \equiv 1\,[67]$$
$$\iff 67/(x^2-1)$$
$$\iff 67/(x-1)(x+1)$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ 67/(x-1) \\ oubien\ 67/(x+1) \end{cases} ; \quad car\ 67 \in \mathbb{P}$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ x-1 = 67k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ oubien\ x+1 = 67k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ x = 67k+1 \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ oubien\ x = 67k-1 \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le Troisième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\Delta = (im+2)^2 - 4(im+2-m)$$
$$= (im)^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m$$
$$= (im)^2 + 4m - 4$$
$$= (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2$$
$$= (im-2i)^2$$

La Question : I) 1) b)

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(im+2)-(im-2i)}{2} = (1-m)i - 1 \\ z_2 = \dfrac{-(im+2)+(im-2i)}{2} = -(1+i) \end{cases}$$

Remarque : Si $\Delta = 0$ *Alors* $z_1 = z_2 = -(1+i)$

La Question : I) 2)

■ $z_2 = -(1+i)$
$$= -\left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$
$$= -2\cos\left(\frac{0-\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}$$
$$= -2\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= -\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \left(-\sqrt{2}\right)\left(-e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)$$
$$= \boxed{\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}$$

■ $z_1 = \left(1 - i\sqrt{2}\right)i - 1$
$$= (i-1) + \sqrt{2}$$
$$= \left(e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{i0}\right) + \sqrt{2}$$
$$= 2i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= 2i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= 2i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}i \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\left(1 + ie^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(e^{i0} + e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(2\cos\left(\frac{0-\frac{3\pi}{4}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{0+\frac{3\pi}{4}}{2}\right)}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$

$$Or \;;\; \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; cos\left(2\times\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; 2\,cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)-1=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \; \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \; \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \;;\; car\;\; 0<\frac{3\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$z_1=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\mathcal{R}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \;:\; \begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P})\\ M(m) & \longmapsto & M'(-im-1+i)\end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(M)=M' &\Leftrightarrow (z_{M'}-z_\Omega)=e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_M-z_\Omega)\\ &\Leftrightarrow -im-1+i-z_\Omega=-i(m-z_\Omega)\\ &\Leftrightarrow -im-1+i=-im+i\,z_\Omega+z_\Omega\\ &\Leftrightarrow -im-1+i+im=(i+1)z_\Omega\\ &\Leftrightarrow (-1+i)=(i+1)z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1+i}{i+1}\right)=z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1+i}{i+1}\right)\left(\frac{i-1}{i-1}\right)=z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \frac{-1+i+i+1}{2}=z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \boxed{i=z_\Omega=\omega}\end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B)=A &\Leftrightarrow (z_A-z_\Omega)=e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_B-z_\Omega)\\ &\Leftrightarrow -1-i-i=-i(b-i)\\ &\Leftrightarrow 1+2i=ib+1\\ &\Leftrightarrow b=2\end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned}D'un\ côté\ on\ a\ :\ \frac{(\omega-a)(m-b)}{(\omega-b)} &=\frac{(i+1+i)(m-2)}{i-2}\\ &=\frac{(2i+1)(m-2)(i+2)}{(i-2)(i+2)}\\ &=\frac{[(i+2)(2i+1)](m-2)}{i^2-2^2}=\frac{(5i)(m-2)}{-5}\\ &=\boxed{2i-im}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Or\ ;\ On\ a:\ m'-a &=-im-1+i+1+i\\ &=\boxed{2i-im}\end{aligned}$$

$$Donc\ :\ \boxed{\frac{(\omega-a)(m-b)}{(\omega-b)}=(m'-a)}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned}\begin{array}{c}A,B,\Omega,et\ M\\ sont\ cocycliques\end{array} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_M-z_B}{z_\Omega-z_B}\right)\times\left(\frac{z_\Omega-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_\Omega-z_A}\right)\times\left(\frac{z_\Omega-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \begin{array}{c}A,M,et\ M'\\ sont\ colinéaires\end{array}\end{aligned}$$

$$notez\ que\ d'après\ 2)a)\ on\ a\ eu:$$

$$\boxed{\left(\frac{z_M-z_B}{z_\Omega-z_B}\right)=\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_\Omega-z_A}\right)}$$

La Question : II) 2) c)

$$\begin{aligned}\begin{array}{c}A,M,et\ M'\\ sont\ colinéaires\end{array} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-im+2i}{m+i+1}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \frac{-i(x+iy)+2i}{x+iy+i+1}\in\mathbb{R}\;;\; m=x+iy\\ &\Leftrightarrow \frac{y+i(2-x)}{(x+1)+i(y+1)}\in\mathbb{R}\;;\; Après\ organisation\\ &\Leftrightarrow \frac{\big(y+i(2-x)\big)\big(x+1-i(y+1)\big)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{Im}\left(\frac{\big(y+i(2-x)\big)\big(x+1-i(y+1)\big)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow -y(y+1)+(x+1)(2-x)=0\\ &\Leftrightarrow -x^2+x+2-y^2-y=0\\ &\Leftrightarrow x^2-x-2+y^2+y=0\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in\mathcal{C}\left(I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right)dt = \int_0^x \left(\frac{1+t-1}{1+t}\right)dt$$
$$= \int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= \int_0^x 1\,dt - \int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= [t]_0^x - [\,\ln|1+t|\,]_0^x$$
$$= x - \ln|1+x|$$
$$= x - \ln(1+x) \quad ; \quad car\ \ 1+x > 1 > 0$$

La Question : I) 1) b)

$Soient \quad x > 0 \quad et \quad 0 \leq t \leq x$

$On\ pose \quad u = t^2 \quad Alors \quad t = \sqrt{u}$

$$Aussi : \left| \begin{array}{l} t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \\ t = x \quad \Leftrightarrow \quad u = x^2 \end{array} \right.$$

$$Encore \quad : \quad \frac{du}{dt} = 2t = 2\sqrt{u} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)du$$

$$Alors \quad : \quad \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right)dt = \int_0^{x^2} \left(\frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)du$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right)du$$

La Question : I) 1) c)

$Soit\ u\ une\ variable\ muette$
$choisi\ a\ priori\ dans\ [0,x^2]\ avec\ x > 0$

$$u \in [0,x^2] \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u \leq x^2$$
$$\Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt{u} \leq x$$
$$\Rightarrow \quad 1 \leq 1+\sqrt{u} \leq 1+x$$
$$\Rightarrow \quad 1 \geq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \geq \frac{1}{1+x}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^{x^2} 1\,du \geq \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right)du \geq \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+x}\right)du$$

$J'ai\ introduit\ \ \frac{1}{2}\int_0^{x^2} du\ \ car\ \ la\ continuité\ est\ vérifiée$

$Et\ parce\ que\ \ 0 < x^2\ \ comme\ \ 0 < x$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[u]_0^{x^2} \geq \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right)dt \geq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} \geq x - \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \geq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \geq \frac{1}{2(x+1)} \quad ; \quad car\ x^2 > 0$$

La Question : I) 2)

$$Comme \quad : \quad \underbrace{\frac{1}{2(x+1)}}_{\xrightarrow{x\to 0^+} \boxed{\frac{1}{2}}} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\xrightarrow{x\to 0^+} \boxed{\frac{1}{2}}}$$

$Alors,$
$en\ vertu\ du\ critère\ de\ comparaison\ on\ écrit :$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(x+1)\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1\times 1 = 1$$

$$parce\ que \quad \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

$$Et \quad : \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}\right)$$
$$= (\ln(1+x))'_{/x=0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$Ainsi \quad : \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$C-à-d \quad que\ f\ est\ continue\ à\ droite\ en\ 0$

La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)-1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\ln(1+x)+\ln(x+1)-x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) - \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f_d'(0) \in \mathbb{R}$$

La Question : II) 1) c)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= (1+0)\times(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow{x\to+\infty}\boxed{0}}+\underbrace{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x\to+\infty}\boxed{0}}+\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\xrightarrow{x\to+\infty}\boxed{0}}+\underbrace{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x\to+\infty}\boxed{0}} = 0$$

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique suivant l'axe (OX) au voisinage de $+\infty$.

La Question : II) 2) a)

La fonction $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant une fraction (quotient) bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]0,+\infty[$,(sur $\mathbb{R}$ tout entier même). Et le dénominateur est non nul.

La fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]0,+\infty[$.

Alors la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant un produit bien défini de deux fonction toutes les deux dérivables sur $]0,+\infty[$. Soit x un élément de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)\right)'$$
$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)'\ln(1+x)+\left(\frac{x+1}{x}\right)(\ln(1+x))'$$
$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln(1+x)+\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
$$= \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

La Question : II) 2) b)

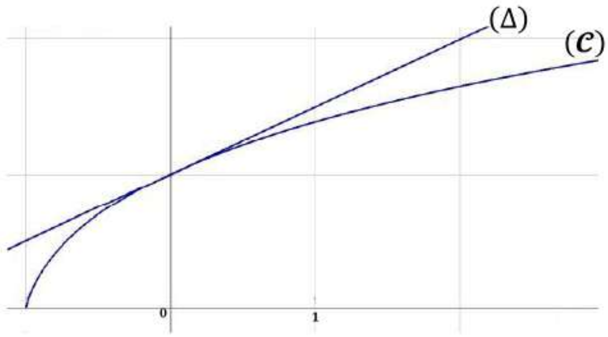
$$Soit\quad x>0 \Rightarrow \frac{1}{2(x+1)}\leq\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)}\leq f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)\geq\frac{1}{2(x+1)}>0$$
$$\Rightarrow f'(x)>0$$
$$\Rightarrow f\ est\ une\ fonction\ strictement\ \nearrow\ sur\ ]0,+\infty[$$

La Question : II) 2) c)

La continuité et la croissance de f nous assure l'écriture suivante :

$$f([0,+\infty[) = \left[f(0)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right[= [1\ ;\ +\infty[$$

La Question : II) 3)



La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

$$Soit\quad x>0 \Rightarrow \frac{1}{2(x+1)}\leq\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)}\leq f'(x)\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 0\leq f'(x)\leq\frac{1}{2}\ ;\ car\ \frac{1}{2(x+1)}>0$$

La Question : III) 1) b)

La fonction g est d'abord une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant une différence de deux fonctions dérivables.
$g'(x) = f'(x)-1\ ;\ \forall x>0$

$$Comme\quad f'(x)\leq\frac{1}{2}$$
$$Alors\quad f'(x)-1\leq\frac{-1}{2}<0$$
$$C-\text{à}-d:\quad g'(x)<0\quad;\quad\forall x>0$$

D'où g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et en vertu de cette décroissance et de la continuité de g sur $]0,+\infty[$ On écrit :

$$g(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to0^+} g(x)\right[=]-\infty,1[$$

Calculs :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right)$$
$$= (+\infty)(0-1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) - x = f(0) - 0 = 1$$

La Question : III) 1) c)

La fonction g est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]-\infty,1[$ car continue est strictement décroissante . Alors :

$$(\forall\, y \in\,]-\infty,1[\,)\ (\exists!\, x \in\,]0,+\infty[\,)\ :\ g(x) = y$$
$$(pour\ 0 \in\,]-\infty,1[\,)\ (\exists!\, \alpha \in\,]0,+\infty[\,)\ :\ g(\alpha) = 0$$
$$C-\text{à}-d\ \ ;\ \ \exists!\, \alpha \in\,]0,+\infty[\ :\ f(\alpha) = \alpha$$

La Question : III) 2) a)

On raisonne par récurrence sur l'entier naturel n que la propriété $P(n)$: $u_n > 0$ est toujours vraie $\forall n\in\mathbb{N}$. Pour $n=0$; $u_0 = a \in\,]0,+\infty[$ Donc l'instance $P(0)$ est vérifiée. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$.

$$\begin{aligned} P(n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow\ u_n > 0 \\ &\Rightarrow\ f(u_n) > f(0)\ ;\ car\ f \nearrow sur[0,+\infty[\\ &\Rightarrow\ u_{n+1} > 1 \\ &\Rightarrow\ u_{n+1} > 0\ ;\ car\ 1 > 0 \\ &\Rightarrow\ P(n+1)\ est\ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi : \begin{cases} l'instance\ P(0)\ est\ vraie \\ l'instance\ P(n)\ implique\ P(n+1)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$D'où\ l'on\ conclut\ la\ véracité\ de\ P(n):$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n > 0$$

Pause Méditation :

« God enjoins you to treat women well, for they are your mothers, daughters, aunts »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : III) 2) b)

La fonction f est une fonction continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ donc l'application du TAF est valable sur n'importe quel intervalle inclus dans $]0,+\infty[$. Soit l'intervalle $[u_n,\alpha]$. avec $[u_n,\alpha] \subset\,]0,+\infty[$.

$$\begin{cases} f\ cont\ [u_n,\alpha] \\ f\ dériv\ ]u_n,\alpha[\end{cases} \Rightarrow\ \exists\, c \in\,]u_n,\alpha[\ ;\ \left(\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right) = f'(c)$$
$$\Rightarrow\ \left(\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right) = f'(c) \le \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| \le \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\ \frac{|f(u_n)-f(\alpha)|}{|u_n-\alpha|} \le \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\ |f(u_n)-f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$
$$\Rightarrow\ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|\ \ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$$

La Question : III) 2) c)

$$Soit\ \ Q(n)\ :\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$$

$$Pour\ \ n=0\ ;\ |u_0-\alpha| = |a-\alpha|$$

$$Donc\ \ Q(0)\ est\ vraie$$

$$Soit\ n\in\mathbb{N}\ fixé\ et\ supposons\ que\ Q(n)\ est\ vraie$$

$$\begin{aligned} Q(n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha| \\ &\Rightarrow\ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a-\alpha| \\ &\Rightarrow\ |u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a-\alpha| \\ &\Rightarrow\ Q(n+1)\ est\ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi\ :\ \begin{cases} Q(0)\ est\ vraie \\ Q(n)\ \Rightarrow Q(n+1)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$Alors\ :\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ Q(n)\ est\ vraie}$$

Pause Méditation :

« Say : My Lord be merciful to them as they brought me up in my childhood »

To Parents

La Question : III) 2) d)

$$Je\ réclame\ que\ :\ \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Car il s'agit d'une suite géométrique de raison ½ strictement comprise entre -1 et 1. En vertu du théorème sur les critères de convergence on en déduit la situation suivante :

$$|u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \boxed{0}}$$

$$Ou\ encore\ :\ \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \boxed{0}} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \boxed{0}}$$

$$D'où\ :\ \lim_{n\infty}(u_n - \alpha) = 0$$

$$Ou\ encore\ :\ \lim_{n\infty}(u_n) = \alpha$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On remarque que la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme étant une composition bien définie de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme $0 \epsilon \mathbb{R}$ alors cette fonction admet une seule primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \epsilon \mathbb{R}\ ;\ F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt\ \ ;\ F(0) = 0 \\ \forall x \epsilon \mathbb{R}\ \ ;\ F'(x) = e^{x^2} \end{cases}$$

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$F'(x) = e^{x^2}$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}$. Rappelez-vous :
La dérivabilité implique le continuité.
On remarque que $\forall x \epsilon \mathbb{R}$; $e^{x^2} > 0$.
C-à-d : $F'(x) > 0$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La Question : 2) a)

Soit $x \epsilon\ ]0,+\infty[$ et soit t une variable muette dans l'intervalle $[0,x]$.

$$t > 0 \implies t^2 > 0 \implies e^{t^2} > e^0$$

$$\implies e^{t^2} > 1$$

$$\implies \int_0^x e^{t^2}\,dt > \int_0^x 1\,dt$$

$$\implies F(x) \geq x\ \ ;\ \forall x > 0$$

$$\implies F(x) \geq \underbrace{x}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}}$$

$$\implies \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

La Question : 2) b)

$\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$; $Domaine\ symétrique$
$\forall x \epsilon \mathbb{R}$; $-x \epsilon \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} e^{t^2}\,dt \\ &= \int_0^{-x} \left(e^{u^2}\right)(-du)\ \ ;\ \ t = -u \\ &= -\int_0^x \left(e^{u^2}\right)du = -F(x) \end{aligned}$$

$$\implies F\ est\ une\ fonction\ impaire$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} F\big(-(-x)\big) \\ &= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=-x}} F(-t) \\ &= -\lim_{t\to+\infty} F(t) = -\infty \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$ car c'est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ Avec :

$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}) &= F(\,]-\infty\,;+\infty[\,) \\ &= \left]\lim_{x\to-\infty} F(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} F(x)\right[\\ &=]-\infty\ ;+\infty[= \mathbb{R} \end{aligned}$$

La Question : 2) d)

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = e^{x^2}$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}$. Alors G la fonction réciproque est aussi dérivable et on a :

$$G'(x) = \frac{1}{F'(G(x))}\ \ ;\ \ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

$$G'(0) = \frac{1}{F'(G(0))} = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{e^0} = 1$$