تصحيح الإمتحان الوطني للرياضيات شعبة العلوم الرياضية A و B 2023 الدورة العادية

①

Ex 1 : Partie 1

1) a) $\forall t \in [0;+\infty[$: $\frac{4}{(2+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{\cancel{4}+4\cancel{t}-\cancel{4}-4t-t^2}{(2+t)^2(1+t)}$

$$= \frac{-t^2}{(2+t)^2(1+t)}$$

puisque $t \geq 0$ donc $t+1>0$

et $(2+t)^2 > 0$

et $t^2 \geq 0$

alors $-t^2 \leq 0$

enfin $\frac{-t^2}{(2+t)^2(1+t)} \leq 0$

$$\frac{4}{(2+t)^2} - \frac{1}{1+t} \leq 0$$

$$\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \quad (*)$$

et $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+t)^2}$

$$= \frac{2(1+t) - (1+t)^2 - 1}{2(1+t)^2}$$

$$= \frac{2+2t-1-2t-t^2-1}{2(1+t)^2}$$

$$= \frac{-t^2}{2(1+t)^2} \leq 0 \; (**) \; \forall t \in [0;+\infty[$$

de $(*)$ et $(*)$ on a: $\forall t \geq 0$ $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$

Par b) on a : $\forall t \geq 0$

$$\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

1) $x \geq 0$

$$\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2}\,dt \leq \int_0^x \frac{1\,dt}{1+t} \leq \int_0^x \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$\left[-\frac{4}{2+t}\right]_0^x \leq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \leq \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{1+t}\right)\right]_0^x$$

$$\frac{-4}{2+x} + 2 \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$$

2) $\forall x \in]0;+\infty[$: $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

donc $$\frac{g(x)-1}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$$

$$= \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}$$

$$= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

alors d'après 1) b) : $\forall x > 0$:
$$\frac{2x}{2+x} - x \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right) - x$$

$$\frac{-x^2}{2+x} \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{1+x}\right)$$

alors
$$\frac{-1}{2+x} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq \frac{-1}{2(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

donc $$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Partie 2 :

$$\begin{cases} f(x) = g(x)e^{-x} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}e^{-x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x}e^{-x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} \times \dfrac{x+1}{x} \times e^{-x}$

puisque: $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X}$ avec $X = 1+x$

$= 0$

et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{+\infty} 1 + \dfrac{1}{x}$

$= 1$

et $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

interpretation graphique : (C_f) admet une asymptote horizontal de l'equation $y = 0$

2) a) $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}e^{-x}$

$= 1$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

car $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-x} = 1$

donc $f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

donc f est continue à droite en 0.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$: $\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}\ln(1+x) - 1}{x}\right)$

$= \dfrac{\ln(1+x)e^{-x} - 1}{x}$

et $\dfrac{e^{-x}-1}{x}g(x) + \dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}g(x) - g(x) + g(x) - 1}{x}$

$= \dfrac{e^{-x}g(x) - 1}{x} = \dfrac{f(x)-1}{x}$ donc.

$\forall x \in]0;+\infty[: \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}-1}{x} g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)\right)$

d'après Partie I question 2 : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$

et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} g(x)$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

donc calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x}$ on pose $X = -x$

lorsque $x \to 0^+$ alors $X \to 0^-$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{X\to 0^-} -\frac{e^{X}-1}{X}$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

$= -1$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{-3}{2}$

d'où $f'_d(0) = \dfrac{-3}{2}$

3) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$:

$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} e^{-x}$

on a $f(x)$ est le produit de $g(x)$ et e^{-x} puisque $x \to e^{-x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $x \to x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ car $x \to \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ alors $f(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[: f'(x) = g'(x) e^{-x} + g(x)(e^{-x})'$

$= \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)' e^{-x} + \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)(-e^{-x})$

$= \dfrac{\frac{1}{x+1} \times x - \ln(1+x)}{x^2} e^{-x} - \dfrac{e^{-x}\ln(1+x)}{x}$

$$= \frac{x - (x+1)\ln(1+x) - x(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

$$= \frac{x - x\ln(1+x) - \ln(1+x) - x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

$$= \frac{x - \ln(1+x)\left[2x+1+x^2\right]}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

$$= \frac{x - (x+1)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

$$\forall x \in]0,+\infty[: \quad f'(x) = \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

4) a) d'après Partie I :

$$\forall x \geq 0 \qquad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right) \leq -\ln(1+x) \leq -\frac{2x}{2+x}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)(1+x)^2 \leq -(1+x)^2\ln(1+x) \leq -\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+2x)(1+x) \leq -(1+x)^2\ln(1+x) \leq -\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$$

$$x-\frac{1}{2}(x^2+2x)(1+x) \leq x-(1+x)^2\ln(1+x) \leq x-\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$$

$$x-\frac{1}{2}(x^2+2x)(1+x) \leq x-(1+x)^2\ln(1+x) \leq \frac{\cancel{2x}+x^2-\cancel{2x}-4x^2-2x^3}{2+x}$$

$$\frac{1}{2}(\cancel{2x}-x^3-x^2-\cancel{2x}-2x^2) \leq x-(1+x)^2\ln(1+x) \leq \frac{-2x^3-3x^2}{2+x}$$

$$\frac{1}{2}(-x^3-3x^2) \leq x-(1+x)^2\ln(1+x) \leq \frac{-2x^3-3x^2}{2+x}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{x^2}(-x-3)}{\cancel{x^2}(1+x)} \leq \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq \frac{\cancel{x^2}(-2x-3)}{(2+x)\cancel{x^2}(1+x)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{x+1}\right) \leq \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq -\frac{2x+3}{(2+x)(1+x)}$$

donc $\forall x \in]0;+\infty[$ on a :

$$-\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} \leq 0$$

et $$-\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)+\frac{3}{2} = \frac{-x-\cancel{3}+3x+\cancel{3}}{2(x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(x+1)}$$

$$= \frac{x}{x+1} \geq 0 \quad \forall x \in]0;+\infty[$$

donc $$-\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)+\frac{3}{2} \geq 0$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{x+1}\right) \geq -\frac{3}{2}$$

d'où :

$$-\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq 0$$

b) on a $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq 0$$

$$-\frac{3}{2}e^{-x} \leq f'(x) \leq 0$$

puisque $x \geq 0$ donc $-x \leq 0$

$$e^{-x} \leq 1$$

$$-\frac{3}{2}e^{-x} \geq -\frac{3}{2}$$

alors $$-\frac{3}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

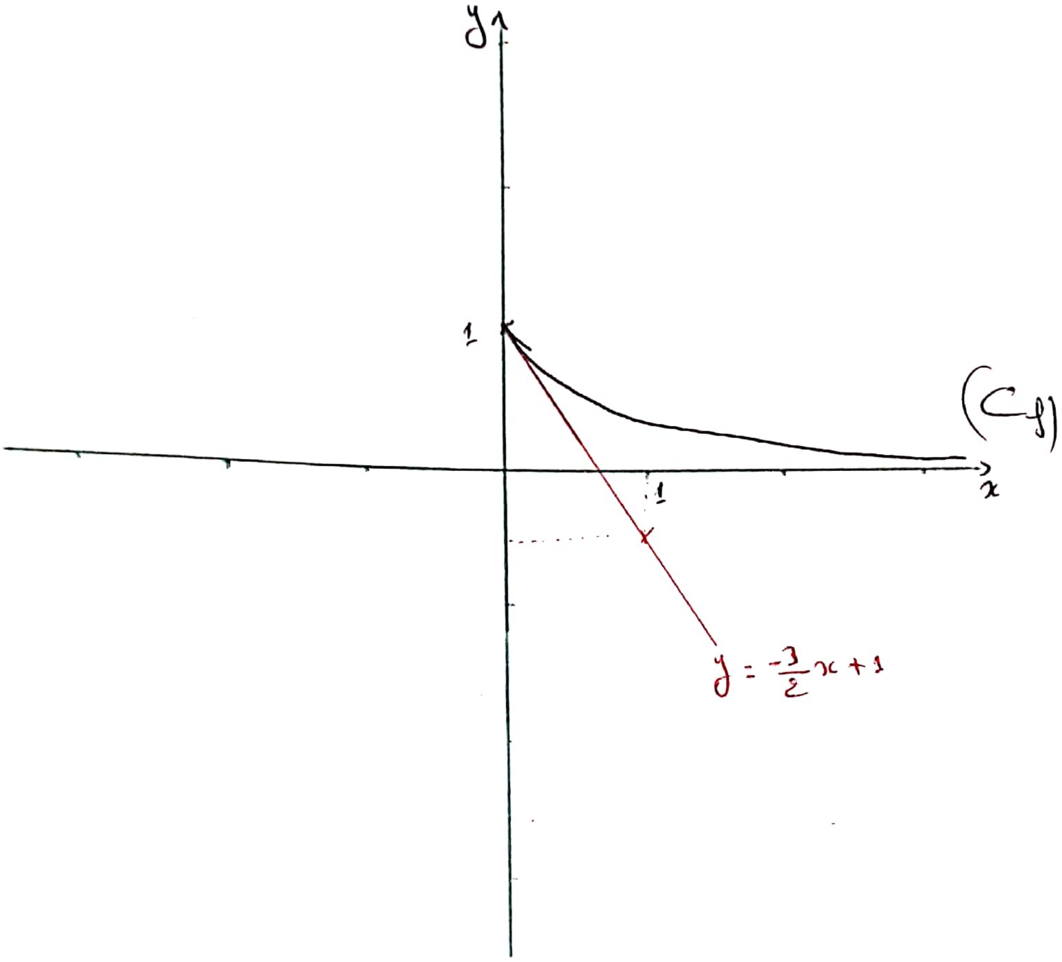
5) a)

x	0		$+\infty$
f'	||	$-$	
f	1	$\searrow$	0

b) la demi-droite (tangente) à droite au point d'abscisse 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = \frac{-3}{2}x + 1$$



Partie III :

1) soit h une fonction définie sur $]0;+\infty[$:

$$h(x) = f(x) - 3x \qquad \forall x \in]0;+\infty[$$

donc $h'(x) = f'(x) - 3$

puisque $\frac{-3}{2} \leq f'(x) \leq 0$

alors $\frac{-9}{2} \leq f'(x) - 3 \leq -3$

donc $\forall x \in]0;+\infty[\quad h'(x) < 0$.

donc h est une fonction strictement décroissant sur $]0;+\infty[$

et h est continue sur $]0;+\infty[$ f est continue et $x \to 3x$ continue.

et $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +} h(x) = -\infty$

donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$

alors l'équation $f(x) = 3x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$

2) a)

$$U_n : \begin{cases} U_0 = \beta \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n \end{cases}$$ ~~alors~~ avec $\beta \in \mathbb{R}^+$

pour $n = 0$ on a $U_0 = \beta \in \mathbb{R}^+$

donc il est vrai pour $n = 0$ car $\beta \geq 0$

hypothèse : $U_n \geq 0$. alors $-U_n \leq 0$

donc $e^{-U_n} \leq 1$ et on sait que $e^x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

alors $0 \leq e^{-U_n} \leq 1$

et $U_n + 1 \geq 1$

$\ln(U_n + 1) \geq 0$

puisque $U_n \geq 0$

alors $\frac{\ln(U_n+1)}{U_n} \geq 0$

$\frac{\ln(U_n+1)}{U_n} e^{-U_n} \geq 0$

$f(U_n) \geq 0$

$U_{n+1} \geq 0$

donc par principe de reccurence on a :

$\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq 0$

b) on a $\forall x \geq \frac{-3}{2} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{3}{2}$

$|f'(x)| \leq \frac{3}{2}$

donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| \frac{f(U_n) - f(\alpha)}{U_n - \alpha} \right| \leq \frac{3}{2}$

$$|f(u_n)-f(\alpha)|\leq \frac{3}{2}|u_n-\alpha| \quad \text{si } u_n\neq\alpha$$

$$\left|\frac{1}{3}f(u_n)-\frac{1}{3}f(\alpha)\right|\leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

$$\forall n\in\mathbb{N} : \quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \quad \text{Car} \quad . \ f(\alpha)=3\alpha$$

c) pour $n=0$ on a $|u_0-\alpha|=|\beta-\alpha|\leq\frac{1}{2^0}|\beta-\alpha|$

Hypothèse : $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$$

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+1}}|\beta-\alpha|$$

donc par principe de reccurence :

$$\forall n\in\mathbb{N} : \quad |u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|=0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

<u>Exercice II</u> :

soit $x\to e^x$ et les points : $\left(\frac{k}{n} ; e^{\frac{k}{n}}\right)$

1)a) on a $f : x\to e^x$ est continue sur $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$

" derivable sur $\left]\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right[$

donc d'apres le T.A.F : $\exists c_k\in\left]\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right[$ telque :

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)=f'(c_k)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)$$

$$e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=e^{c_k}\left(\frac{k+1-k}{n}\right)=\frac{1}{n}e^{c_k}$$

b) $M_kM_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{k}{n} - \frac{k+1}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} e^{c_k}\right)^2}$

$= \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}}$

c) $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$: $M_kM_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}}$

c_k et on a : $\frac{k}{n} \leqslant c_k \leqslant \frac{k+1}{n}$

$\frac{2k}{n} \leqslant 2c_k \leqslant \frac{2(k+1)}{n}$

$e^{2\frac{k}{n}} \leqslant e^{2c_k} \leqslant e^{\frac{2(k+1)}{n}}$

(e^x est croissant)

$1 + e^{2\frac{k}{n}} \leqslant 1 + e^{2c_k} \leqslant 1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}$

$\frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

$\frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant M_kM_{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2) a) on a $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant M_kM_{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} M_kM_{k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2\frac{k}{n}}} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$ 11

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

b) Somme de Reiman :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\underbrace{\lim_{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}}_{\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx} \leqslant \lim_{+\infty} S_n \leqslant \underbrace{\lim_{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}}_{\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx}$$

donc $\lim_{+\infty} S_n = \int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

ex 3 :

$u = 1+(2-\sqrt{3})i$

1) a) $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

$=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Scanned by CamScanner

b) Montrer que : $\dfrac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

on a : $(1-i)(1+\sqrt{3}i) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} \times 2\, e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)i}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i}$

~~c) ... $(2-\sqrt{3})$ ...~~

~~$= 1+\sqrt{3}i + 2i = 2\sqrt{3}i$~~

c) $\dfrac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}i - i + \sqrt{3}\right)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)\right)$

$= e^{i\frac{\pi}{12}}$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = (1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = (\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}^2+1^2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-1^2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

d) $u = 1 + (2-\sqrt{3})i$

~~$|u| = \sqrt{1^2 + (2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+4+3}$~~

$u = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)i$

$= \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} e^{+i\frac{\pi}{12}}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} e^{+i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2) $x_0 = 1$; $y_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$

a) pour $n = 0$:

$x_0 + i y_0 = 1 = u^0$ Vrai

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n + i y_n = u^n$

$x_{n+1} + i y_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n + i\left((2-\sqrt{3})x_n + y_n\right)$

$= x_n\left(1 + i(2-\sqrt{3})\right) + y_n\left(-2+\sqrt{3}+i\right)$

$= x_n\left(1 + i(2-\sqrt{3})\right) + i y_n\left(1 + (\sqrt{3}+2)i\right)$

$= \left[1 + i(2-\sqrt{3})\right](x_n + i y_n)$

$= u \times u^n$

$= u^{n+1}$ Vrai pour $n+1$

donc par principe de reccurence :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n + i y_n = u^n$

b) on a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u^n = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{12}}$

$x_n + i y_n = u^n = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)$

donc $x_n = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)$

et $y_n = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)$

et d'après 1)d) $u = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} e^{i\frac{\pi}{12}}$

donc $(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

donc $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^n = \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^n$

en fin : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n = \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} \\ y_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} \end{cases}$

3) a) A_n est le point d'affixe u^n

$O(0,0)$; $A_0(1;0)$; $A_n(x_n;y_n)$

donc O ; A_0 et A_n sont alignées si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaire alors

$$\overrightarrow{OA_0}(1,0) \text{ et } \overrightarrow{OA_n}\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} ; \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n}\right)$$

calculons $\det\left(\overrightarrow{OA_0} ; \overrightarrow{OA_n}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{OA_0} ; \overrightarrow{OA_n}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} \\ 0 & \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n} \end{vmatrix}$$

$$\det\left(\overrightarrow{OA_0} ; \overrightarrow{OA_n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)^n}$$

donc $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaire si et seulement si :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 0$$

donc $\dfrac{n\pi}{12} \equiv 0\,[\pi]$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{n\pi}{12} = k\pi$

$$n = 12k$$

donc est un multiple de 12 pour que les point O, A_0 et A_n sont alignées.

b) pour que le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle en A_n il faut que

$$\frac{z_{A_{n+1}} - z_{A_n}}{z_O - z_{A_n}} \in i\mathbb{R}$$

donc

$$\frac{z_{A_{n+1}} - z_{A_n}}{z_O - z_{A_n}} = \frac{u^{n+1} - u^n}{-u^n}$$

$$= \frac{u^n - u^{n+1}}{u^n}$$

$$= \frac{x_n + iy_n - x_{n+1} - iy_{n+1}}{x_n + iy_n}$$

$$= \frac{\cancel{x_n} + \cancel{iy_n} - \cancel{x_n} - (2-\sqrt{3})y_n - i(2-\sqrt{3})x_n - \cancel{iy_n}}{x_n + iy_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-2)y_n + i(\sqrt{3}-2)x_n}{x_n + iy_n}$$

$$= (\sqrt{3}-2)\left(\frac{y_n + ix_n}{x_n + iy_n}\right)$$

$$= i(\sqrt{3}-2)\left(\frac{y_n^2 + x_n^2}{x_n^2 - y_n^2}\right) \in i\mathbb{R}$$

alors OA_nA_{n+1} est rectangle $\forall n \in \mathbb{N}$

Scanned by CamScanner

Ex 4 :

Soit p un nombre premier impair.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2\,[p]$

1) a) Théorème de Fermat

p premier impair

et $p \wedge 2 = 1$ $\Bigg\}$ $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$

b) $2^{p-1} = 2^{\frac{2(p-1)}{2}} = \left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)^2$

donc $2^{p-1} - 1 = \left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2$

$= \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

or $2^{p-1} \equiv 1\,[p] \iff 2^{p-1} - 1 \equiv 0\,[p]$

d'ou $\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0\,[p]$

d'ou $2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0\,[p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0\,[p]$

$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\,[p]$

2) Soit x une solution de l'equation (E)

a) x est une solution de (E) $\iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que

$x^2 = 2 + kp$

$x^2 - kp = 2$

donc pour que p et x soit premier entre eux

il faut que $p \wedge x = 1$

alors $p \wedge x / x \Rightarrow p \wedge x / x^2$ $\Big\}$ $\Rightarrow p \wedge x / x^2 - kp$

et $p \wedge x / p \Rightarrow p \wedge x / kp$

puisque $x^2 - kp = 2$ alors $p \wedge x / 2$

c'est à dire $p \wedge x = 1$ ou $p \wedge x = 2$

puisque p est impair alors $p \wedge x \neq 2$

d'où $\underline{p \wedge x = 1}$

b) Théorème de Fermat

$\begin{cases} p \text{ premier} \\ p \wedge x = 1 \end{cases}$ alors $x^{p-1} \equiv 1 [p]$

et x solution de (E) : $x^2 \equiv 2 [p]$

$$(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} [p]$$

$$x^{p-1} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

$$1 \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} [p] \qquad (\text{car } x^{p-1} \equiv 1 [p])$$

alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$

3) Rappel : $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}$:

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \text{ et } k C_p^k = p\, C_{p-1}^{k-1}$$

alors : $k C_p^k = p C_{p-1}^{k-1} \Leftrightarrow p$ divise $k C_p^k$ $(*)$

et $k \in \{1, \dots, p-1\}$ donc $k \neq p$

et puisque p premier alors

$k \wedge p = 1$ $(**)$

de $(*)$ et $(**)$ $\begin{cases} p \text{ divise } k C_p^k \\ k \wedge p = 1 \end{cases}$ Théorème de Gauss

$\underline{p \text{ divise } C_p^k}$

4) E utilise la forme de Moivre :

soit $z = a + ib = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a/ $$(1+i)^p = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^p$$

$$= \sqrt{2}^p \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^p$$

$$= \left[(\sqrt{2})^2\right]^{p/2} \left[\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{p/2}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i\, 2^{p/2}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

b) $$(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2k}(-1)^k + i\sum_{0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k+1}$$

$$= 2^{p/2}\cos\left(p\pi/4\right) + i\, 2^{p/2}\sin\left(p\pi/4\right)$$

$$\begin{cases} 2^{p/2}\cos\left(p\pi/4\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k} \\ 2^{p/2}\sin\left(p\pi/4\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k+1} \end{cases}$$

on sait que p divise $C_p^k \quad \forall k \in \{1, \dots, p-1\}$

alors $C_p^k \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \{1 \dots p-1\}$

changement de variable $k = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

$$C_p^{2k'} \in \mathbb{Z} \quad \forall k' \in \left\{1, \dots \frac{p-1}{2}\right\}$$

$\forall k \in \{1 \dots \frac{p-1}{2}\}; \; C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$ (19)

$$(-1)^k C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$$

$$2^{p/2} \cos(p\frac{\pi}{4}) \in \mathbb{Z}$$

et $p / C_p^{k^*} \iff p / C_p^{2k'} \quad \forall k' \in \{1 \dots \frac{p-1}{2}\}$

donc $\quad p / C_p^{2k} \; \forall k \in \{1 \dots \frac{p-1}{2}\}$

$\cancel{p / C_p^{2k} \; \forall k \in \}}$

et $2k \in \{1 \dots p-1\}$

donc $\quad C_p^{2k} \equiv 0 [p]$

alors $\forall k \in \{1 \dots p-1\} \qquad (-1)^k C_p^{2k} \equiv 0 [p]$

or $\quad 2^{p/2} \cos(p\frac{\pi}{4}) = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k}$

$$= \underbrace{(-1)^0 C_p^0}_{1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k}}_{\equiv 0 [p]}$$

alors $\quad 2^{p/2} \cos(p\frac{\pi}{4}) \equiv 1 [p]$

5) $p \equiv 5 [8] \iff \exists k \in \mathbb{Z} ;\ p = 5 + 8k$

On a :

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$$

$$2^{\frac{4+8k}{2}} \equiv 1 [p]$$

$$2^{2+4k} \equiv 1 [p] \quad (*)$$

et $2^{p/2} \cos(p\frac{\pi}{4}) = 2^{\frac{5+8k}{2}} \cos((5+8k)\frac{\pi}{4})$

$$= 2^{\frac{5+8k}{2}} \cos(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$$

$$= 2^{\frac{5+8k}{2}} \cos(\frac{5\pi}{4})$$

$$= 2^{\frac{5+8k}{2}} \cos(\frac{\pi}{4} + \pi)$$

$$= -2^{\frac{5+8k}{2}} \cos(\frac{\pi}{4})$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} 2^{\frac{5+8k}{2}}$$

$$= -2^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{5+8k}{2}}$$

$$= -2^{\frac{4+8k}{2}}$$

$$= -2^{2+4k} \equiv -1 (p)$$

or $2^{p/2} \cos(p\frac{\pi}{2}) \equiv 1 [p]$

alors $1 \equiv -1 [p] \iff 2 \equiv 0 [p]$

$\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $2 = 0 + k'p = k'p$

21

$$2 = k'p$$

puisque p premier et impair donc $p > 2$

donc absurd car $k' \in \mathbb{Z}$

~~absurde~~

alors si $p = 5\ [8]$ alors (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Ex 5

Rappel $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ un espace vectoriel réel

$$E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Partie 1 :

1) $(M_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe

$$M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

donc $0 \in E$

soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2) \in E$

on a $M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & y_1 \\ 2y_1 & x_1-y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2+y_2 & y_2 \\ 2y_2 & x_2-y_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_1-x_2+y_1-y_2 & y_1-y_2 \\ 2(y_1-y_2) & x_1-x_2+y_1-y_2 \end{pmatrix} \in E$$

Scanned by CamScanner

alors $(E,+)$ est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2) $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel

$(E,+)$ est sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ donc $E \neq \emptyset$

et $\forall (M(x_1,y_1)$ et $M(x_2,y_2)) \in E^2$

donc : $M(x_1,y_1)+M(x_2,y_2) \in E$

et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in E$

donc $\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda(x+y) & \lambda y \\ 2\lambda y & \lambda(x-y) \end{pmatrix} \in E$

alors $(E,+,.)$ est un sous espace vectoriel de $(M_2,+,.)$

3) a) $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$; $M(x,y) \times M(x',y')$

$$= \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+yy'+xy'+yx'+2yy' & xy'+\cancel{yy'}-x'y-\cancel{yy'} \\ 2x'y+\cancel{2y'y}+2xy'-\cancel{2yy'} & 2yy'+xx'-xy'-yx'+yy' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+3yy'+xy'+yx' & xy'-x'y \\ 2(x'y+xy') & xx'+3yy'-(xy'+yx') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'+3yy' ; xy'+yx')$$

b) Déduction:

on a $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est une anneau.

on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1,0) = I \in E$

et $(E,+)$ est sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

et $\forall\, M(x,y)$ et $M(x',y') \in (M_2(\mathbb{R}))$

$$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'+3yy', xy'+yx') \in E$$

alors $(E,+,\times)$ est un sous anneau de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$

alors $(E,+,\times)$ est un anneau.

et $M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'+3yy', xy'+yx')$

$= M(x'x+3y'y ; x'y + xy')$

$= M(x',y') \times M(x,y)$

alors $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

4) a) $M(\sqrt{3},1) \times M(-\sqrt{3},1)$

$= M(\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 3 \times 1 \times 1 ; \sqrt{3} \times 1 + 1 \times (-\sqrt{3}))$

$= M(3-3 ; \sqrt{3}-\sqrt{3})$

$= M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

b) on a $M(\sqrt{3},1) \times M(-\sqrt{3},1) = 0$

soit $M(a,b)$ l'inverse de $M(\sqrt{3},1)$

alors $M(a,b)\times M(\sqrt{3},1) = I$

donc $\underbrace{M(a,b)\times M(\sqrt{3},1)}\times M(-\sqrt{3},1) = 0\times M(a,b)$

$I \times M(-\sqrt{3};1) = 0$

$M(-\sqrt{3},1) = 0$ absurd

donc $M(\sqrt{3},1)$ n'est pas inversible

puisque $M(\sqrt{3},1) \in E$ alors

$(E,+,\times)$ n'est pas un corps

Partie II :

1) soit $x,y \in \mathbb{Q}$ on suppose que $y \neq 0$

alors $x+y\sqrt{3} \Rightarrow x = -y\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = -\sqrt{3}$

alors $-\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ (car $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}^*$; $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$)

est ça et un absurd car on sait que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

donc $y=0$ et $x+0\times\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow y=0$ et $x=0$

~~on suppose que~~

2) $F = \{x+y\sqrt{3} \,/\, (x,y) \in \mathbb{Q}^2\}$

donc $F-\{0\} = \{x+y\sqrt{3} \,/\, (x,y) \in \mathbb{Q}^{2*}\}$

donc $F-\{0\} \subset (\mathbb{R}^*,\times)$

et $F-\{0\} \neq \emptyset$ car $1+\sqrt{3} \in F-\{0\}$

~~soit~~ ~~$x+y\sqrt{3}$~~

soit $x+y\sqrt{3}$ et $x'+y'\sqrt{3} \in F-\{0\}$

on a $x'+y'\sqrt{3} \neq 0$

alors $\dfrac{x+y\sqrt{3}}{x'+y'\sqrt{3}} = \dfrac{(x+y\sqrt{3})(x'-y'\sqrt{3})}{(x'+y'\sqrt{3})(x'-y'\sqrt{3})}$

$$= \frac{xx' - xy'\sqrt{3} + x'y\sqrt{3} - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2}$$

$$= \frac{xx'-3yy'}{x'^2-3y'^2} + \left(\frac{-xy'+x'y}{x'^2-3y'^2}\right)\sqrt{3}$$

$$\in F-\{0\}$$

donc $F-\{0\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

3) ~~...~~

a) soit soit $(x,y) \in F^*$ $\quad (F^* = F - \{0\})$

$$\mathcal{E}(x+y\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \in G$$

et on a : $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(0+0\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $0+0\sqrt{3} \in F-\{0\}$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{E}(F-\{0\})$

donc ~~...~~ $\mathcal{E}(F-\{0\}) \subset G-\{0\}$

et soit $M(x,y) \in G^*$

alors $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} = \mathcal{E}(x+y\sqrt{3})$ ~~...~~

donc $M(x,y) \subset \mathcal{E}(F-\{0\})$

26

alors ~~F~~ $G^* \subset F^*$

donc on a $\begin{cases} G-\{0\} \subset \varepsilon(F-\{0\}) \\ \varepsilon(F-\{0\}) \subset G-\{0\} \end{cases}$

donc $\varepsilon(F-\{0\}) = G-\{0\}$

b) soit $M(x,y)$ et $M(x',y') \in G-\{0\}$
alors $x+y\sqrt{3}$ et $x'+y'\sqrt{3} \in F-\{0\}$

$$\varepsilon((x+y\sqrt{3})\times(x'+y'\sqrt{3})) = \varepsilon(xx'+3yy'+(x'y+xy')\sqrt{3})$$

$$= M(xx'+3yy', x'y+xy')$$

et on sait que $M(x,y)\times M(x',y') = M(xx'+3yy', xy'+yx')$

alors $\varepsilon((x+y\sqrt{3})\times(x'+y'\sqrt{3}))$ ~~$= M(xx'+$~~

$$= M(x,y)\times M(x',y')$$

$$= \varepsilon(x+y\sqrt{3})\times\varepsilon(x'+y'\sqrt{3})$$

donc ε est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

~~c) on a $F-\{0\}$ est une sous groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$ donc $\varepsilon(F-\{0\})$ est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ donc $G-\{0\}$ est une sous groupe~~

c) on a $(F-\{0\},\times)$ est une sous groupe commutatif de $(\mathbb{R}^*,\times)$

donc $(\varepsilon(F-\{0\}),\times)$ est une sous groupe commutatif de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

// $(G-\{0\},\times)$ est une sous groupe commutatif de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

$\Longrightarrow (G-\{0\},\times)$ est un groupe commutatif

4) on : $(E,+,\times)$ est une anneau commutatif

et $G \subset E$

et $(G,\times)$ Groupe commutatif

$(G-\{0\},\times)$ Groupe commutatif

donc $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

Fin Serhi youssef

Scanned by CamScanner