

EXERCICE1 : (7.75 points)**Partie I**

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x}{1+x} \right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{-1}{2}$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0.5 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x) - 1}{x} = \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) g(x) + \left(\frac{g(x) - 1}{x} \right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

0.75 $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

Partie III

0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue $x : f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$

2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n)$$

- 0.5 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 0$
- 0.5 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \alpha|, \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
- 0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha|, \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$
- 0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \exists c_k \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} ; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$
 $(M_k M_{k+1} \text{ désigne la distance de } M_k \text{ à } M_{k+1})$

0.5 c) En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} ; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, M_k M_{k+1}, \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, S_n, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$

EXERCICE3 : (3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que : $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O , A_0 et A_n sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

EXERCICE4 : (3 points)

Soit p un nombre premier impair. On considère dans \mathbb{Z} l'équation $(E) : x^2 \equiv 2 \pmod{p}$

0.25 1- a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.25 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

(On remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$)

2- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 3- Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, p divise C_p^k

(On rappelle que : $(\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}) \quad C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 4-a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p \frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$)

0.5 b) On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 \pmod{p}$ (on pourra utiliser la question 3-)

0.5 5- En déduire que si $p \equiv 5 \pmod{8}$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans \mathbb{Z}

EXERCICES : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Partie I :

- 0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$
- 0.25 2- Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- 0.25 3- a) Vérifier que : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$; $M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$
- 0.5 b) En déduire que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- 0.25 4- a) Vérifier que : $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$
- 0.25 b) En déduire que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

Partie II :

Soient $F = \{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- 0.25 1- Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x + y\sqrt{3} = 0$ si et seulement si $(x = 0$ et $y = 0)$
- 0.25 2- Montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times)
- 3- Soit φ l'application définie de $F - \{0\}$ vers E par :
- $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} ; \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$$
- 0.25 a) Vérifier que : $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$
- 0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers (E, \times)
- 0.25 c) En déduire que $(G - \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif.
- 0.25 4- Montrer que $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.

FIN

